Erste Zugänge zum Gesetz der großen Zahlen im Mathematikunterricht der Grundschule[1]

AISLING LEAVY UND MAIRÉAD HOURIGAN, MARY IMMACULATE COLLEGE

[1] Original: Leavy, A. & Hourigan, M. (2014). Motivating Inquiry in Statistics and Probability in the Primary Classroom. *Teaching Statistics*, 37, 41–47. Übersetzung und Bearbeitung: LAURA MARTIGNON, LUDWIGSBURG UND DANIEL FRISCHEMEIER, PADERBORN

Zusammenfassung: *Wir beschreiben, wie der Einsatz einer spielerischen Lernumgebung in Verbindung mit digitalen Werkzeugen Kinder in den oberen Klassen der Grundschule unterstützt, sich mit einem Konzept zu beschäftigen, das traditionell als zu anspruchsvoll für die Grundschule gilt: Dem Gesetz der großen Zahlen.*

1 Einleitung

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung verstehen, ist eine Herausforderung für Kinder und Erwachsene. Die alltäglichen Erfahrungen von Kindern und ihre Intuitionen über Wahrscheinlichkeiten stellen häufig Hindernisse für die Entwicklung eines adäquaten Verständnisses für die dazu gehörenden Konzepte (Fischbein 1975; Shaughnessy 1992) dar. Ziel der hier berichteten Studie war es, Grundschüler/Innen bei der Erhebung von Daten in Zufallsexperimenten und beim Verständnis vom „Gesetz der großen Zahlen" zu unterstützen.

Bernoullis Gesetz der großen Zahlen besagt, dass, wenn die Anzahl der Versuche bei einem Zufallsprozess erhöht wird, die prozentuale Differenz zwischen dem erwarteten und tatsächlichen Wert gegen Null geht. Die Forschung zeigt, dass bei Erwachsenen (Tversky und Kahneman 1974; Fischbein und Schnarch 1997) und Kindern (Ireland und Watson 2009; Konold et al. 2011) oft Missverständnisse in Bezug auf das Gesetz der großen Zahlen ausgeprägt sind. Eine tiefer gehende Diskussion findet man bei Falk und Lann (2015), die eine umfassende Darstellung des Gesetzes der großen Zahlen wie auch eine Übersicht über die dazu gehörende Forschung bieten. Unsere Studie beschäftigt sich mit der Entwicklung des Verständnisses des Gesetzes der großen Zahlen bei Kindern der Primarstufe.

Daher wählten wir für die Beschreibung des Gesetzes der großen Zahlen einen informellen Zugang, den man so formulieren kann: Je größer die Anzahl der Versuche, desto näher liegen die experimentellen Ergebnisse bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit.

Obwohl das Thema Wahrscheinlichkeit ab der dritten Klasse auf dem irischen Lehrplan steht, und die Lehrpläne für die Klasse 6 empfehlen, dass Schüler/Innen Zufallsexperimente in großer Anzahl wiederholen sollen, um anhand von relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse zu schätzen, gibt es keinen Verweis auf die formale Einführung des Begriffs. In den USA sehen die sogenannten Common Core Standards wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe erst in Klasse 7 vor. Unsere Forschung wurde von der Frage motiviert, ob das Konzept des Gesetzes der großen Zahlen bereits Kindern der letzten Grundschuljahre näher gebracht werden kann.

2 Der Forschungskontext

Die hier vorliegende Studie beschreibt ein Forschungsvorhaben, das an einem College für die Lehrerausbildung in Irland durchgeführt wurde. Die Colleges bilden etwa 50 % aller irischen Grundschullehrer/Innen aus.

Teilnehmer/Innen

Zwanzig Student/Innen des letzten Jahres der Grundschullehramtsausbildung nahmen während des letzten Semesters ihrer Lehrerausbildung an der Studie teil. Sie hatten alle vorgeschriebenen mathematikdidaktischen Vorlesungen (drei Semester) belegt und ihre schulpraktische Ausbildung abgeschlossen (auf Unter-, Mittel- und Oberstufenniveau); Mathematikdidaktik hatten sie alle als Nebenfach gewählt.

Forschungsdesign

In dieser Studie setzten angehende Grundschullehrer/Innen und zwei Mathematikdidaktiker/Innen die Methode „Japanese Lesson Study" ein (Fernandez und Yoshida 2004; Lewis und Tsuchida, 1998), um die Planung und Durchführung von Unterrichtsstunden zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Grundschule zu untersuchen. Diese Methode wird zunehmend in der Lehrerbildung verwendet, um die Auswirkungen verschiedener Lehransätze für die Entwicklung von Kindern und ihres mathematischen Verständnisses zu untersuchen (Leavy et al 2013; Leavy 2010; Murata 2011).

Die Student/Innen arbeiteten in vier Kleingruppen an der Gestaltung und Umsetzung von vier verschiedenen Unterrichtseinheiten. Der Design- und Gestaltungsprozess der Unterrichtsstunden bestand aus den folgenden Phasen:

Phase 1: Diese Phase beinhaltete die theoretische und praktische Vorbereitung einer Unterrichtseinheit. Jede Studierendengruppe bekam einen Begriff aus der Wahrscheinlichkeitstheorie zugeordnet, den sie anhand relevanter Forschungsliteratur, anhand von Lehrplänen und weiteren bereit gestellten Ressourcen erforschten und erkundeten. Diese Themen waren aus einer Zusammenstellung der Lehrpläne und Empfehlungen von Berufsverbänden (z. B. Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) ausgewählt worden. Die Forscher fungierten als Mentor/Innen und unterstützten die angehenden Grundschullehrer/Innen bei der Umsetzung der Forschungsergebnisse und der Empfehlungen, um einen detaillierten Unterrichtsplan für den Einsatz im Mathematikunterricht der Grundschule zu entwickeln. Das Unterrichtsformat entsprach den Richtlinien von Ertle et al. (2001) und enthielt einen spezifischen Bezug zu den Unterrichtsschritten (Lernaktivitäten und Schlüsselfragen), den Aktivitäten der Schüler/Innen, ihren erwarteten Antworten, der Reaktion der Lehrer/Innen auf die Aktivitäten/Antworten der Schüler/Innen sowie zu den Zielen und Methoden der Bewertung.

Phase 2: Die Implementierungsphase bestand darin, dass ein Studierender aus jeder Gruppe eine 5. Klasse unterrichtete, während die anderen Gruppenmitglieder und die Forscher die Aktivitäten im Klassenzimmer und das Lernen der Schüler/Innen beobachteten und bewerteten. Anschließend wurde nach einer Diskussion das ursprüngliche Unterrichtskonzept den Beobachtungen entsprechend modifiziert, um die Lernergebnisse der Schüler/Innen zu verbessern. Die zweite Implementierungsphase beinhaltete das Unterrichten des überarbeiteten Unterrichtsplans mit einer anderen 5. Klasse und eine Reflexion über die dort gemachten Beobachtungen. Die zweite Durchführung, die hier in diesem Artikel im Vordergrund steht, wurde auf Video aufgezeichnet.

Phase 3: Diese Phase stellte den Abschluss des Forschungsseminars dar und bestand darin, dass jede Arbeitsgruppe ihren Kommilitoninnen und Kommilitonen und Dozent/Innen am Ende des Semesters die Ergebnisse ihrer Arbeit vorstellte.

Die Durchführung der Unterrichtsstudie ermöglichte die Entwicklung von Materialien und Unterrichtsabläufen zur Unterstützung der Entwicklung eines Wahrscheinlichkeit-Verständnisses bei Grundschulkindern. Die Unterrichtssequenz, die wir beschreiben, wurde während einer Unterrichtsstudie entworfen, unterrichtet und überarbeitet. Diese haben wir mit Kindern der 5. Klasse (im Alter von 10–11 Jahren) an zwei verschiedenen Grundschulen erprobt. Während wir uns hier auf die letzte Unterrichtsstunde in der Wochensequenz, d. h. das Gesetz der großen Zahlen, konzentrieren, behandelten die vorherigen Unterrichtsstunden Wahrscheinlichkeitskonzepte in dieser Reihenfolge: die Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten, der Vergleich und die Erklärung von Wahrscheinlichkeiten und das Einordnen der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.

3 Die Unterrichtssequenz

Wir wollten in der Unterrichtssequenz ein Umfeld schaffen, das die Neugierde der Kinder mit Blick auf Wahrscheinlichkeiten fördert und sie in die entdeckungsbasierte, praktische mathematische Erkundung einbezieht. In der Auswahl von Aktivitäten, die wir hier beschreiben, haben wir den Kontext einfacher Glückspiele genutzt, um das Verhältnis zwischen experimenteller und theoretischer Wahrscheinlichkeit zu untersuchen. Dabei wurden zwei digitale Medien verwendet, um die Kinder bei ihren Untersuchungen zu unterstützen: ein Video und das Online-Applet des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Caine's Spielhalle

Um unsere Erkundungen über Wahrscheinlichkeiten in einen für Kinder relevanten und realen Kontext zu stellen, beschlossen wir, die Lektion mit einem Videoclip von „Caine's Arcade" (Caines Spielhalle) (http://cainesarcade.com/ (Abb. 1)) zu beginnen. Dieses Video erzählt die Geschichte eines 9-jährigen Jungen, der seinen Sommer damit verbringt, eine aufwändige Spielhalle aus Pappe im Autoteilegeschäft seines Vaters zu bauen.

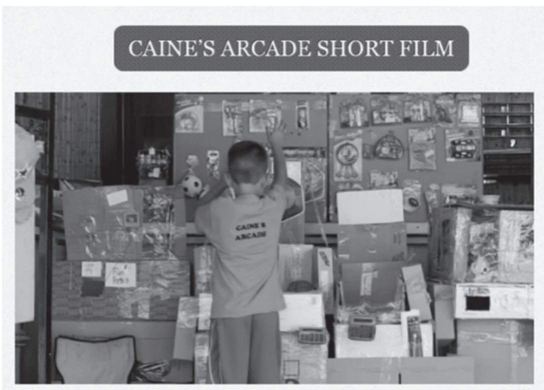

Abb. 1: „Caine's Arcade" („Spielhalle von Caine")

Im Videoausschnitt zeigt Caine seine Spiele und beschreibt, wie einige leichter zu gewinnen sind als andere. Er berichtet auch, dass er seine eigenen Spielzeugautos als Preise benutzt. Er hat jedoch nur eine bestimmte Anzahl von Autos und wenn jeder Kunde jedes Mal ein Spiel gewinnt, gehen ihm sehr schnell die Preise aus. Nach dem Ansehen des Videos, diskutierten die Kinder der 5. Klasse, wie Caine die Spiele wohl definiert hat, damit sie nicht zu einfach würden. Zum Beispiel erkannten die Kinder im Fußballspiel, dass Caine einige Torhüter hinzugefügt hatte, um das Gewinnen schwieriger zu machen. Dann stellten wir die Klasse vor dieses Problem:

„Caine fügt immer wieder neue Spiele in seiner Spielhalle hinzu. Die Gewinnchancen können jedoch nicht so hoch sein, dass ihm die Preise ausgehen. Bis zum Ende dieses Schultages sollst du ihm ein Spiel empfehlen, das für seine Spielhalle geeignet ist. Um dies gut hin zu bekommen, müssen wir viele verschiedene Spiele ausprobieren und diese in Bezug auf Gewinnchancen erkunden, damit wir Caine helfen können.“

Auftakt der Stunde: Fairness erforschen

Die Unterrichtsstunde begann mit einer einführenden Aktivität zu Wahrscheinlichkeiten. Dieses Spiel wurde ausgewählt, um Übung bei dem Umgang mit Wahrscheinlichkeiten zu erlangen, die Versprachlichungen über das Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten zu schärfen und eine Diskussion über Fairness zu führen. Der Lehrer zeigte dabei eine Tasche mit sechs Spielmarken. Drei der Marken waren gelb, und drei waren rot. Er vermischte die Marken in der Tasche und sagte, dass er eine Marke herausziehen würde. Kinder wurden darüber informiert, dass sie bei einer gelbe Marke gewinnen, aber bei einer roten Marke verlieren würden.

Dann stellte der Lehrer eine Reihe von Fragen und erlaubte den Kindern, in kleinen Gruppen zu arbeiten, um ihre Antworten zu diskutieren und zu protokollieren (das Protokollblatt wurde auf dem interaktiven Whiteboard gezeigt, siehe Abb. 2). Nach jeder Frage gab der Lehrer den Gruppen die Möglichkeit, über ihre Ergebnisse zu berichten. In allen Fällen wurde von den Schüler/innen erwartet, dass sie ihre Antworten begründeten. Der Lehrer stellte die folgenden Fragen:

- Was sind die möglichen Ergebnisse? Welche Farbe könnte die Marke haben?
- Wie hoch sind die Chancen, eine gelbe Marke zu ziehen? Warum?
- Glaubt ihr, dass dies ist ein faires Spiel ist? Was glaubt ihr, was ich mit einem „fairen Spiel“ meine?

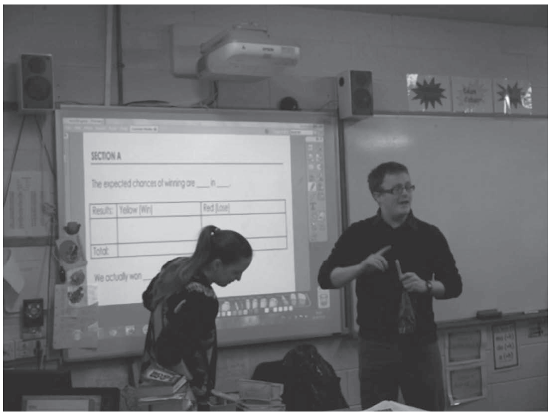

Abb. 2: Protokollblatt auf dem interaktiven Whiteboard

Die Kinder wurden dann gebeten, alle bisherigen Erkenntnisse und Schlussfolgerungen zu nutzen, um die folgende Aufgabe zu bearbeiten: „Stellen wir uns vor, dass dies ein faires Spiel ist und die Chancen, eine gelbe Marke zu ziehen, bei 50:50 oder halbe-halbe liegen. Wenn ich das Spiel sechsmal genau auf die gleiche Weise spiele, wie oft werde ich dann wohl eine gelbe Marke ziehen?“

Nachdem der Lehrer die Vorgehensweise festgelegt hatte, wurden die Kinder in Kleingruppen eingeteilt und spielten das Spiel sechsmal. Jedes Mal wurden sie angewiesen, die Tasche zu schütteln, blind hineinzugreifen, eine Marke herauszunehmen und die Farbe auf ihrem Protokollblatt zu notieren, und dann die Marke wieder in die Tasche zu legen und die Tasche noch einmal zu schütteln (Abb. 3).

Abb. 3: Das einführende Spielmarkenspiel

Als sie sechsmal gespielt und ihre Ergebnisse aufgezeichnet hatten, summierten sie ihre Ergebnisse für Rot und Gelb.

Die folgende Diskussion fand mit einer Gruppe statt:

Lehrer: Wenn ich das sechsmal machen würde, wie oft würdest du gelb erwarten?

Rebecca: Gelb beim ersten Mal, aber insgesamt dreimal gelb.

Mark: Drei gelbe Marken.

Lehrer: Wie kommst du darauf, Mark?

Mark: Weil es 3 gelbe und 6 Marken insgesamt gibt.

Cian: Nun, du könntest 3 gelbe Marken bekommen. Aber das musst du nicht. Du könntest auch 4 rote und 2 gelbe bekommen.

Die Kinder beschäftigten sich weiter mit dem Spiel. Sechsmal wurden rote Marken (null gelbe Marken) gezogen.

Lehrer: Also unsere Vorhersage war dreimal gelb, aber wir haben nun 6 rote Marken. Hast du eine Ahnung, warum das passieren konnte?

Rebecca: Wir hatten einfach nur Pech.

Lehrer: Wenn wir es noch einmal spielen würden, würden wir dann das gleiche Ergebnis erzielen?

Rebecca: Nein. Wir würden diesmal vielleicht kein Pech haben.

Lehrer: Ist das ein faires Spiel?

Alan: Nun, es gibt 3 rote und 3 gelbe Marken. Man könnte also eine rote oder eine gelbe bekommen, aber es ist nicht garantiert, dass wir verlieren oder gewinnen.

Lehrer: Glaubst du, dass dieses Spiel den Spielhallenbesitzer (Caine) oder den Spieler bevorzugt?

Cian: Den Spielhallenbesitzer.

Wie dieses Gespräch veranschaulicht, ließen die Ergebnisse der Aktivität (d. h. beim fairen Spiel zu verlieren) einige Kinder zu dem Schluss kommen, dass das Spiel unfair war (d. h. das Spiel den Spielhallenbesitzer begünstigte). Im Anschluss an die Kleingruppenaktivität fand eine kurze Diskussion in der ganzen Klasse statt, bei der die folgenden Fragen an die Kinder gestellt wurden:

- Hat eine Gruppe, wie von uns erwartet, dreimal gelb bei 6 Versuchen gezogen?
- Hat eine Gruppe ein Ergebnis erzielt, das sie nicht erwartet hatte?
- Sind wir uns einig, dass das Spiel fair ist? Warum haben verschiedene Gruppen dann unterschiedliche Ergebnisse erzielt?
- Wie können wir unsere Untersuchung anders durchführen oder unsere Ergebnisse anders anordnen, so dass das Ergebnis näher an dem liegt, was wir erwarteten (50:50)?

Anschließend wurden die Kinder gebeten, ihre Ergebnisse mit der Klasse zu teilen. Die Ergebnisse für jede Gruppe wurden in einem Tabellenkalkulationsprogramm eingegeben (und auf dem interaktiven Whiteboard angezeigt) und das Gesamtergebnis für die Klasse berechnet. Obwohl einige der Gruppen große Diskrepanzen zwischen ihren theoretischen (dreimal gelb und dreimal rot) und experimentellen Ergebnissen (0 gelb und 6 rot (Abb. 4)) aufwiesen, wurden sie damit konfrontiert, dass es schwierig ist, das Ergebnis vorherzusagen, wenn nur eine geringe Anzahl von Versuchen durchgeführt wird.

Grúpa 1	Win	Lose	Grúpa 4	Win	Lose
Total	4	2	Total	6	0
Grúpa 2	Win	Lose	Grúpa 5	Win	Lose
Total	3	3	Total	1	5
Grúpa 3	Win	Lose	Grúpa 6	Win	Lose
Total	2	4	Total	3	3

Abb. 4: Ergebnisse der einzelnen Gruppen beim einführenden Spielmarkenspiel

Die Kinder wurden gebeten, sich zu überlegen, ob nicht vielleicht „was tatsächlich passiert, dem, was wir erwarten, näher kommt“, wenn das Spiel häufiger gespielt wird – z. B. wurden bei einer Stichprobe von 36 Zügen 19 gelbe und 17 rote Marken gezogen (Abb. 5).

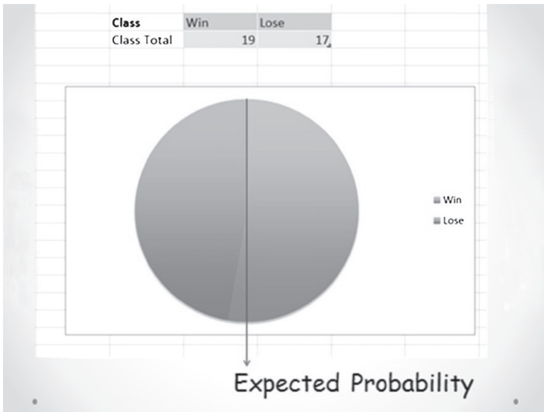

Abb. 5: Zusammengefasste Daten der ganzen Klasse für das einführende Spielmarkenspiel

Daher wurden die Schüler/Innen gebeten zu überlegen, ob eine Erhöhung der Anzahl der Spiele, vielleicht einen besseren Hinweis darauf geben würde, welche Ausgänge man bei dem Spiel tatsächlich erwarten kann.

Untersuchung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe von Stationen

Den Kindern wurde mitgeteilt, dass sie an einer Reihe von Stationen Glücksspiele spielen würden – mit dem Ziel, ein Spiel zu finden, das für Caines Spielhalle geeignet wäre. Jede Station hatte ein Schild, auf dem das Ziel des Spiels oder das, was für das Gewinnen des Spiels erforderlich war, stand. An jeder Station koordinierte eine/n Studierende/n, der/die die Aktivität. Bei einer ersten Untersuchung der Glücksspiele wurden die Kinder angeregt, die Gewinnchancen jedes Spiels zu bestimmen, (und dies auf ihrem Protokollblatt festzuhalten), bevor sie das Spiel tatsächlich spielten. Nachdem eine Gruppe jedes Spiel mit der vorgegebenen Anzahl von Wiederholungen durchgeführt hatte, hatte sie den Auftrag, anhand ihrer Ergebnisse zu entscheiden, ob das jeweilige Spiel für Caines Spielhalle geeignet war oder nicht – d. h. wie viele Spielzeuge Caine verschenken müsste, wenn dieses Spiel in seiner Halle gespielt würde. Jede Gruppe besuchte alle Stationen und notierte sowohl das vorhergesagte als auch das tatsächliche Ergebnis für jede Station.

Station 1: Der 12-seitige Würfel

An dieser Station musste ein 12-seitiger Würfel geworfen werden; die Seiten waren mit den Zahlen 1–12 nummeriert. Um zu gewinnen, musste man eine 1 würfeln. Die Schülerinnen und Schüler berechneten zuerst die Gewinnchancen (1 von 12) und würfelten dann 12mal und notierten, wie oft dabei die 1 fiel.

Station 2: Finde den König

Der Gruppe wurden 3 Karten präsentiert. Auf eine der Karten war der König – man musste den König finden, um zu gewinnen. Die Karten wurden gemischt und dann verdeckt auf den Tisch gelegt. Die Kinder berechneten die Gewinnchancen (1 von 3) und spielten dieses Spiel dann dreimal und notierten, wie oft sie den König aufdeckten.

Station 3: Der Kartenbeutel

Diese Station umfasste einen Beutel, in dem sich 9 Karten befanden. Es gab 2 Asse und 7 andere Karten. Die Kinder mussten eine Karte aus dem Beutel ziehen. Um zu gewinnen, mussten sie ein As ziehen. Sie berechneten die Gewinnchancen (2 von 9) und spielten dieses Spiel dann 9mal und legten jedes Mal die ausgewählte Karte wieder in den Beutel. Die Kinder notierten, wie oft sie ein As zogen.

Station 4: Bingo

Bei diesem Spiel enthielt ein Beutel 12 Spielmarken: 10 rote und 2 grüne. Die Kinder mussten eine rote ziehen, um zu gewinnen. Die Kinder berechneten die Gewinnchance (10 von 12). Sie zogen eine Marke aus dem Beutel, notierten die Farbe und legten die Marke wieder in den Beutel. Sie zogen 12mal und notierten, wie oft sie eine rote Marke zogen.

Station 5: Das Glücksrad

Bei dieser Aktivität wurde ein elektronisches Glücksrad verwendet, der sich auf der NCTM Illuminations Website [http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=79] befindet. Im Glückradspiel wurde ein Kreis in 12 Segmente unterteilt. Um zu gewinnen, musste der Zeiger auf einem Segment in der oberen Hälfte stehen bleiben. Die Schüler/Innen registrierten die Gewinnchance (6 von 12) und führten 12 Drehungen durch. Sie notierten, wie oft der Zeiger in der oberen Hälfte des Kreises landete.

Station 6: Lotterie

Ein Beutel wurde mit 9 nummerierten Tischtennisbällen gefüllt, die jeweils mit einer Zahl zwischen 1 und 9 nummeriert waren. Die Schüler/Innen mussten eine 9 ziehen, um zu gewinnen. Sie registrierten die Gewinnchancen (1 von 9), bevor sie 9mal zogen. Sie notierten dann, wie oft sie einen Tischtennisball mit der Zahl 9 zogen.

Das beste Spiel für Caines Spielhalle finden: Was passiert, wenn wir die Anzahl der Versuche erhöhen?

Als alle Gruppen alle Stationen absolviert hatten, diskutierten wir mit den Kindern über die Wahrscheinlichkeit, die jeweiligen Spiele zu gewinnen.

Lehrer: Welches Spiel hätte am einfachsten zu gewinnen sein sollen?

Evan: ‚Finde den König‘.

AJ: ‚Bingo‘.

Kinder nicken einvernehmlich mit dem Kopf.

Lehrer: Was meinst du, Sophie?

Sophie: Das Spiel ‚Finde den König‘ und ‚Kartenbeutel‘

Lehrer: Habt ihr ein Spiel öfter gewonnen, als ihr erwartet hattet?

Evan: Wir haben ‚Finde den König' dreimal gewonnen.

Lehrer: Wie oft hast du erwartet, es zu gewinnen?

Evan: Nur 1mal. Aber wir haben den König dreimal erwischt.

Adam: Für uns war es das Spiel „Kartenbeutel". Wir dachten, wir würden 2 von 9 bekommen, aber wir hatten 5mal das As.

Lehrer: Wie können wir das Spiel spielen, um dem erwarteten Ergebnis näher kommen?

Anna: Wir könnten einige der Karten oder Kugeln entfernen.

Amanda: Wir könnten es mehrmals spielen.

Wie wir aus der obigen Diskussion ersehen können, erkannten einige Kinder, dass je öfter sie das Spiel spielten, desto näher lagen ihre tatsächlichen Ergebnisse an den erwarteten/vorhergesehenen. Indem er die Idee der Schüler/Innen aufgriff, machte der Lehrer den Vorschlag, dass, wenn man jedes Spiel öfter spielen würde, wie sie es mit dem anfänglichen Spielmarkenspiel taten, man eine bessere Vorstellung davon bekommen könnte, ob es ein gutes Spiel für Caines Spielhalle sei oder nicht. De Lehrer sagte den Kindern, dass sie dieses Phänomen noch weiter untersuchen würden. Jede Gruppe wurde eingeladen, ihre erste Station erneut zu besuchen und dieses Spiel 36mal zu spielen. An dieser Station wurden sie beim ersten Mal an ihre Ergebnisse erinnert und dann gebeten, ihre Ergebnisse vorherzusagen, wenn sie das Spiel 36mal spielen würden. Sobald sie fertig waren, verglichen sie ihr Ergebnis mit dem vom ersten Mal, als sie das gleiche Spiel (nur mit weniger Versuchen) spielten. In einigen Fällen war es notwendig, „äquivalente Brüche" durch den Einsatz einer „Bruchtabelle" (ein pädagogisches Instrument, das in Grundschulklassen üblich ist) zu behandeln, damit der Vergleich stattfinden konnte. Wir haben die folgenden Fragen verwendet, um sowohl die Gruppen als auch die anschließende Diskussion in der Klasse zu leiten:

- Welche Unterschiede hast du zwischen dem ersten Mal, als du das Spiel gespielt hast, und dem, als du es 36mal gespielt hast, bemerkt?

- Welche Ergebnisse waren den von uns erwarteten Gewinnchancen näher: das erste Mal oder das zweite Mal? Was glaubst du, warum das so ist? Diskutiert das in euren Gruppen und überlegt, ob ihr einen Grund für eure Antwort finden könnt.

Nachfolgend ein Auszug aus der Diskussion der gesamten Klasse:

Lehrer: Welche Ergebnisse waren den von uns erwarteten Chancen näher: das erste Mal oder das zweite Mal?

Kinder: Das zweite Mal.

Lehrer: Was glaubst du, warum das so ist?

Sarah: Wir haben es mehr versucht.

Anna: Wir hatten mehr Glück.

Niamh: Wir hatten mehr Versuche.

Ailbhe: Ja, wir hatten mehr Chancen, es zu tun.

Die Mehrheit der Gruppen fand heraus, dass, wenn sie das Spiel 36mal spielten, die tatsächliche Anzahl von Gewinnen näher bei dem lag, was sie erwartet hatten, als beim ersten Mal, als sie das Spiel spielten. Der Lehrer sagte ihnen, dass sie die folgende Hypothese untersuchen würden: „je häufiger die Spiele durchgeführt werden, umso zuverlässiger ist das Ergebnis, (mit anderen Worten, die experimentelle Wahrscheinlichkeit pendelt sich bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit ein).

Wir benutzten das Glücksradspiel (Station 5), um die Hypothese zu überprüfen. Wir haben uns für einen digitalen Einsatz entschieden, da wir auf diese Weise eine große Anzahl von Versuchen in sehr kurzer Zeit durchführen konnten und eine visuelle Darstellung der Ereignisse erhielten. Die beiden Datensätze (die Ergebnisse von 12 Drehungen und die Ergebnisse von 36 Drehungen) aus der Glücksradgruppe wurden der Klasse auf dem interaktiven Whiteboard vorgestellt (Abb. 6) und die Ergebnisse diskutiert.

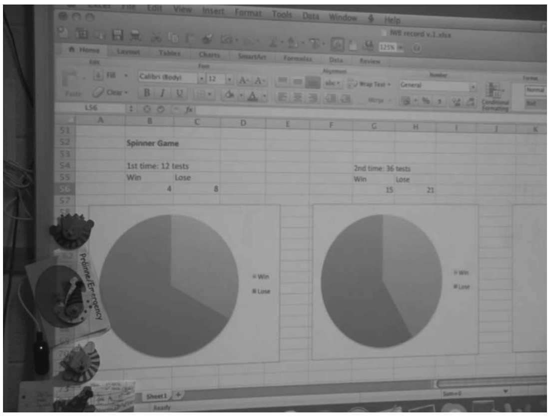

Abb. 6: Vorstellungen der ersten zwei Ergebnisse beim Glücksradspiel

Durch die Verwendung eines Kreisdiagramms zur Darstellung der Ergebnisse der beiden Datensätze sahen die Kinder, dass sie in der geringeren Anzahl von

Versuchen das Spiel 4 von 12mal gewonnen hatten, während sie in der größeren Anzahl von Versuchen das Spiel 15 von 36mal gewonnen hatten. Die Schüler/Innen bemerkten, dass bei der größeren Versuchsanzahl die tatsächlichen Ergebnisse näher an den die vorhergesagten Ergebnisse waren.

Der Lehrer erklärte der Klasse dann, dass sie einen wirklich umfangreichen Versuch machen und den Computer benutzen würden, um 1000mal den Zeiger zu drehen. Er fragte sie, wie oft sie erwarten würden, zu gewinnen. Die Schülerinnen und Schüler sagten voraus, dass dies fast 500mal sein würde, und es gab eine von den Schüler/Innen initiierte Diskussion über die Rolle, die das Glück spielen würde. Wir verwendeten das Illuminations Online-Glücksrad und führten 1000 Drehungen durch und bildeten die neuen Ergebnisse als Kreisdiagramm neben den ursprünglichen Ergebnissen auf dem Whiteboard ab (Abb. 7).

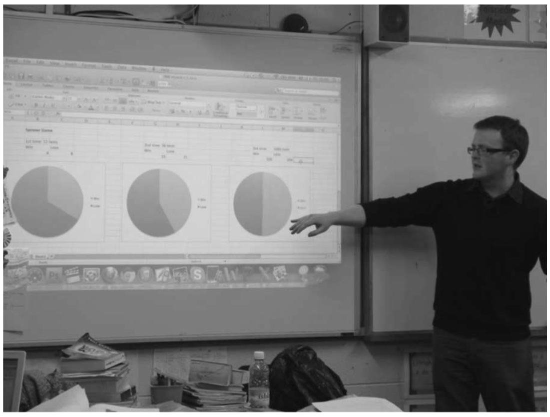

Abb. 7: Vergleich der Ergebnisse beim Glücksradspiel mit steigender Anzahl der Versuche auf 1000

Wie wir sehen können, haben die Schüler/Innen in der dritten computersimulierten Untersuchung 506mal gewonnen und 494mal verloren. Es folgte darauf eine Diskussion über die Ergebnisse, angeregt durch die folgenden Diskussionsfragen:

- Wenn wir 1000mal gespielt haben, wie oft haben wir gewonnen?
- Vergleicht in euren Gruppen unseren großen Versuch mit unserem kleinen Versuch und schaut, welcher näher am erwarteten Wert von 50:50 lag.
- Das Ergebnis von welchen Versuchen (klein/groß) war näher an unseren erwarteten Gewinnchancen?

Lehrer: Als wir 1000mal spielten, wie oft haben wir gewonnen?

Emily: 506mal

Lehrer: War das nah an unserer Vorhersage?

Emily: Wir haben 500mal vorhergesagt. Es ist nicht perfekt, aber es ist nah dran.

Lehrer: Was passiert also, wenn wir die Anzahl der Spiele erhöhen?

Katie: Wir kommen näher.

AJ: Ja, wir kommen näher.

Zum Abschluss der Aktivität wurde die Gelegenheit genutzt, das Video von Caines Spielhalle erneut zu anzuschauen. Die Schüler/Innen hatten wenige Schwierigkeiten, festzustellen, welche unserer Spiele die besten für Caine in seiner Spielhalle wären. Sie wechselten auch gerne die Perspektive und diskutierten über das beste Spiel für einen Spielhallenspieler, indem sie bei ihren Entscheidungen auf die Faktoren leicht zu gewinnen und den Unterhaltungswert zurückgriffen. Insgesamt haben wir festgestellt, dass die Schüler/Innen in der Lage waren, selbstbewusst und kompetent die Sprache der Wahrscheinlichkeit in diesen abschließenden Diskussionen zu verwenden, sie konnten leicht den Unterschied zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen identifizieren und wendeten ihr neues Wissen über experimentelle Wahrscheinlichkeiten an, um die theoretischen Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Ereignisse abzuschätzen.

4 Reflexion

Wir glauben, dass der Kontext von Caines Spielhalle die sinnvolle Erforschung probabilistischer Begriffe innerhalb einer realen Situation unterstützt hat. Die Möglichkeit, verschiedene Glücksspiele zu spielen, die jeweils unterschiedliche Ergebnisse produzieren sollten, half den Grundschulkindern, sich der Mängel einer kleinen Anzahl von Versuchen bewusst zu werden. Im Allgemeinen zeigten die Kinder Überlegungen, dass ein Spiel mit großer Versuchsanzahl durchzuführen, Caine das beste Feedback über die Gewinn- und Verlustchancen des Spiels geben würde – da er an langfristige Ergebnisse denken musste. Die Mehrheit der Kinder konnte sehen, dass es manchmal schwierig war, bei einer kleinen Anzahl von Versuchen das Ergebnis vorherzusagen. Die Begriffe, die dem Gesetz der großen Zahlen zugrunde liegen, stellen jedoch eine kognitive Herausforderung für junge Lernende dar. Für einige Kinder war die Fokussierung auf die Rolle des Glücks ein Hindernis, um Schlüsse über die möglichen Ergebnisse bei den verschiedenen Spielen zu ziehen. Das Illuminations-Glücksrad unterstützte die Kinder jedoch sehr bei der Erforschung des Gesetzes der großen Zahlen und führte sie durch die Simulation zu der Erkenntnis, dass die Anzahl der Versuche das Verhältnis zwischen theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeit beeinflusst, d. h. was wir erwarten und was tatsächlich passiert, kommen sich mit der zunehmenden Anzahl der Versuche näher.

Literatur

Ertle, B.; Chokshi, S.; Fernandez, C. (2001). *Lesson planning tool.* Retrieved from http://www.tc.columbia.edu/lessonstudy/doc/Lesson_ Planning_Tool.pdf (accessed 26 July 2014).

Falk, R.; Lann, A. L. (2015). Numbers defy the law of large numbers. *Teaching Statistics, 37*(2), 54–60. DOI: 10.1111/test.12031.

Fernandez, C.; Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E.; Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96–105.

Ireland, S.; Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 339–370.

Konold, C.; Madden, S.; Pollatsek, A.; Pfannkuch, M., Wild, C.; Ziedins, I.; Finzer, W.; Horton, N. J.; Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*, 68–86.

Leavy, A. M. (2010). Preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 9*(1), 46–67.

Leavy, A.; McMahon, A.; Hourigan, M. (2013). Early algebra: developing understanding of the equals sign. *Teaching Children Mathematics, 20*(4), 246–252.

Lewis, C.; Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river: how research lessons improve Japanese education. *American Educator, 22*(4), 12–17, 50–52.

Murata, A. (2011). Conceptual overview of lesson study: introduction. In: L. Hart, A. Alston and A. Murata (eds). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*, pp. 1–12. NY: Springer.

Shaughnessy, M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In: A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 465–494. New York: Macmillan.

Tversky, A.; Kahneman, D. (1974). Judgment underuncertainty: heuristics and biases. *Science, 185*, 1124–1131.

Anschriften der Verfasser

Aisling Leavy
Mary Immaculate College
University of Limerick
Limerick, Ireland
aisling.leavy@mic.ul.ie

Mairéad Hourigan
Mary Immaculate College
University of Limerick
Limerick, Ireland
mairead.hourigan@mic.ul.ie